1D
9D

Hur ofta väljer vi lika?

PROBLEMLÖSNING – MODELL – SANNOLIKHET

Avsikt och matematikinnehåll

Att låta eleverna arbeta med ett sannolikhetsproblem där den intuitiva uppfattningen om problemets lösning kan stå i konflikt med den matematiska lösningen.

Förkunskaper

Grundläggande förståelse för slump och sannolikhet samt sannolikhetsberäkning.

Material

En slumptalstabell för talen 0–99. Slumptalsgeneratorer kan även hittas på nätet, t ex www.random.org/integers

Beskrivning

- Be eleverna tänka på ett tal mellan 1 och 100 och låt dem *gissa* hur stor sannolikheten är att några tänker på samma tal.
- Låt eleverna skriva talet på en lapp.
- Någon antecknar på tavlan allteftersom talen läses upp. Observera *om* och *när* ett redan nämnt tal återkommer. Upprepa försöket 10 gånger. Hur många gånger tänker två personerpå samma tal?
- Gör motsvarande försök som tidigare, men tänk nu på ett tal mellan 1 och 200. Hur många gånger tänker två personer på samma tal?
- Undersök nu elevernas och lärarens födelsedagar. Är det möjligen så att två fyller år samma dag?
- På nätet kan man finna slumptalsgeneratorer för att ta fram listor med tal, t ex mellan 0 och 99. I tabellen på sista sidan finns femhundra sådana slumptal. Använd tabellen för att simulera 20 försök av händelsen att tänka på ett tal mellan 0 och 99. Att välja 25 tal i ordning, t ex horisontellt, ur tabellen motsvarar alltså att 25 elever var och en tänker på ett tal.
  I hur stor andel av dessa försök är det två som ”tänker på samma tal”?
- Diskutera om det finns andra vardagshändelser än ”samma födelsedag” där den använda sannolikhetsteoretiska modellen kan komma till användning.
- Gå tillbaka till den första uppgiften. Formulera ett uttryck för sannolikheten att alla tänker på *olika* tal. Formulera sedan ett uttryck för sannolikheten att minst två personer tänker på *samma* tal. Hur stor är den sannolikheten i din klass?
- Diskutera varför det kan vara skillnad på den faktiska sannolikheten och det man intuitivt uppfattar är sannolikheten för denna typ av händelser.
- Formulera ett generellt uttryck för denna typ av händelser.

Introduktion

Inledningsvis kan det vara lämpligt att repetera hur man beräknar olika typer av sannolikhet. Några exempel:

- Vid kast med en vanlig sexsidig tärning:
  P(att få en trea) = 1/6
  P(att få minst trea, dvs tre, fyra, fem eller sex) = 4/6 = 2/3
- Vid kast med två tärningar:
  P(att få två ettor) = 1/6 · 1/6 = 1/36
- Kön på barnen i en trebarnfamilj (om man räknar med 50/50 chans för pojke/flicka):
  P(tre pojkar) = 1/2 · 1/2 · 1/2 = 1/8
  P(minst en flicka) = 1 – 1/8 = 7/8

Uppföljning

Hur kommer det sig att det händer så ofta att minst två elever i en klass tänker på samma tal? Det är en vanlig fråga hos elever. Då är det dags att börja resonera om oberoende händelser och sannolikheter.

Hur sannolikt är det att alla elever i en klass med 25 elever väljer olika tal? Den som först läser upp sitt tal har 100 möjligheter av 100 att inte ta något redan uppläst, nästa elev 99 av 100, den därnäst 98 av 100 osv. Vi antar att eleverna valt tal oberoende av varandra. Sannolikheten för att alla ska ha valt *olika* tal är då

$$\frac{100}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{100} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{77}{100} \cdot \frac{76}{100} \approx 0,038$$

Sannolikheten att inte alla valt olika, dvs att minst två valt samma tal, är då 1 – 0,038 ≈ 0,96.

Motsvarande sannolikhet då m st oberoende av varandra ”väljer” bland n tal är

$$p = 1 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{n^m}$$

På nästa sida följer en tabell med sannolikheter för några olika värden på n och m.

Ursprung

Har tidigare förekommit i Uppslagsboken och i Nämnaren.

Att läsa

Emanuelsson, G. & Munther, R. (1983). Samma födelsedag! *Nämnaren* 9(4), 52–53.

Jagers, P. (2005). Slumpen i vardag, samhälle, liv och universum. *Nämnaren* 32(1), 24 - 27.

Råde, L. (1987). Att pröva och att samla slumptal. *Nämnaren* 13(4), 47–49.

Antal att välja bland n	Antal elever m	Sannolikhet för att minst två valt samma p
100	20	0,87
	25	0,96
	30	0,99
200	20	0,63
	25	0,79
	30	0,90
300	20	0,48
	25	0,64
	30	0,78
365	20	0,41
	25	0,57
	30	0,71
400	20	0,38
	25	0,54
	30	0,67
500	20	0,32
	25	0,46
	30	0,59

83	15	62	13	18	89	64	48	33	77	85	94	13	29	21	40	35	18	90	42	37	78	88	8	72
62	35	59	71	84	38	5	98	98	77	89	65	82	38	15	48	49	37	48	0	79	4	79	73	22
39	37	29	24	11	89	29	82	98	93	96	30	79	6	75	26	7	98	3	77	73	96	42	77	11
97	4	70	30	60	38	51	17	1	20	40	68	65	68	52	73	57	46	22	83	44	70	82	37	58
96	76	44	73	65	13	45	14	26	4	32	24	8	85	44	40	63	76	79	39	47	80	85	16	97
59	15	52	55	35	23	23	34	71	63	41	35	88	88	41	80	89	19	4	96	5	68	66	68	48
30	69	79	26	16	79	34	22	35	32	95	27	93	67	60	91	91	85	19	89	27	73	55	69	40
83	24	11	36	82	50	7	73	7	49	33	94	8	9	24	41	72	16	26	91	83	87	64	50	65
43	60	1	74	13	79	88	44	72	66	78	23	19	3	63	2	14	66	85	61	98	12	59	53	98
16	42	48	9	67	32	71	89	46	29	22	22	98	98	4	17	27	87	1	82	43	67	94	52	79
54	90	96	92	18	14	30	58	62	19	23	24	74	95	84	70	52	94	58	53	15	14	77	78	81
49	26	26	51	20	46	87	74	69	5	82	79	43	32	49	54	88	55	82	41	16	91	13	78	5
48	10	93	74	52	58	5	57	69	5	30	72	48	85	7	2	6	53	56	78	61	35	76	67	49
74	85	19	27	45	98	2	9	51	21	77	28	47	4	58	34	29	66	85	92	70	23	74	11	2
51	85	91	10	32	94	23	30	36	67	23	24	1	92	40	0	9	84	69	29	9	54	79	43	69
51	81	83	62	40	91	48	50	71	57	26	20	37	32	49	92	41	5	65	91	15	76	55	33	0
25	21	82	2	60	50	18	34	96	85	87	33	17	15	48	37	82	34	47	26	87	37	9	48	58
14	4	26	63	94	71	59	75	19	84	20	88	68	91	81	89	48	82	5	61	52	87	97	37	37
17	15	9	78	69	30	93	62	63	98	35	37	40	94	86	2	96	37	89	20	91	1	36	37	83
83	98	5	6	42	93	29	88	61	3	48	48	5	21	14	95	29	68	24	63	27	5	31	78	71